Az új esztendőt — 2011-et — a következő harmonikus azonossággal köszöntöm:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1007}+\frac{1}{504}+\frac{2}{1009}+\frac{1}{505}+\frac{2}{1011}+\frac{1}{506}+\cdots+\frac{2}{2011}+\frac{1}{1006} \\ = \quad & 1+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2011} \end{aligned}$$

Összesen 2011 darab tört van a fenti képletben; bármely 2010 darab tört egyértelműen meghatározza az utolsót. A felső összegben a második, harmadik, ..., utolsó előtti tört mindegyike a törtet közrefogó két szomszéd tört harmonikus közepe. Az alsó összegben a tagok között találjuk a 6, 28 és 496 tökéletes számok reciprokait éppúgy, mint a Bibliából ismert 153 és 276 számok reciprokait. Látni való, hogy a felső illetve az alsó összegben a k-adik tag

$$\frac{2}{1006+k} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{1+2+3+\cdots+(2k-1)}$$

Állítom, hogy $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+3+\cdots+(2k-1)}$$

Az eredeti azonosság ez utóbbinak a speciális esete $n = 1006$ esetén. Az n-re vonatkozó azonosságot teljes indukcióval bizonyítom. Az $n = 1$ eset rendben van, hiszen

$$\frac{2}{1+1} = \frac{1}{1}$$

Ha egy fix n-ről $(n+1)$-re térünk át, akkor a bizonyítandó állítás bal oldala ennyivel növekszik:

$$-\frac{2}{n+1}+\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+2}=\frac{1}{(n+1)\,(2n+1)}$$

A jobb oldal növekedése:

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+(2n+1)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)/2}=\frac{1}{(n+1)\,(2n+1)}$$

Ezzel a bizonyítás teljes.

Megjegyzés: Az eredeti azonosság mindkét oldalán szerepel ez a 6 darab tört:

$$\frac{1}{561},\ \frac{1}{630},\ \frac{1}{703},\ \frac{1}{780},\ \frac{1}{861},\ \frac{1}{946}$$

Ezek közül az első 5 darab harmonikus közepe:

$$\frac{1}{707}$$

Ez a tört is szerepel az eredeti felső összegben. A 6 darab közös tört az alsó összegben egyébként közvetlenül egymás mellett található. A fenti bizonyítás alapján látható, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{561}+\frac{1}{630}+\frac{1}{703}+\frac{1}{780}+\frac{1}{861}+\frac{1}{946} \\ = & \frac{2}{33}-\frac{1}{17}+\frac{2}{35}-\frac{1}{18}+\frac{2}{37}-\frac{1}{19}+\frac{2}{39}-\frac{1}{20}+\frac{2}{41}-\frac{1}{21}+\frac{2}{43}-\frac{1}{22} \end{aligned}$$

Érdekes, hogy itt a lenti összegben a másodiktól az utolsó előttiig mindegyik tag az őt közrefogó tagok harmonikus közepének a minuszegyszerese! Az utolsó tagot az összeg elejére írva ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{22}+\frac{2}{33}-\frac{1}{17}+\frac{2}{35}-\frac{1}{18}+\frac{2}{37}-\frac{1}{19}+\frac{2}{39}-\frac{1}{20}+\frac{2}{41}-\frac{1}{21}+\frac{2}{43} \\ = & \frac{1}{66}-\left(\frac{1}{595}+\frac{1}{666}+\frac{1}{741}+\frac{1}{820}+\frac{1}{903}\right) \end{aligned}$$

Előbukkant tehát a Bibliából szintén ismert 666 is. Érdekesség, hogy az utolsó 5 tört harmonikus közepe éppen

$$\frac{1}{745}$$

Boldog (sőt Harmonikus) Új Évet Kíván

hujter.misi@gmail.com